Theoria linearum æquidistantium,

quam

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROL. JOH. Ds. HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.

lauream ambiens submittit

ADOLPH. R. ÅBERG,
Philos. Cand., Vermlandus.

In Lyceo Carol. die XVII Jun. MDCCCXLIV.

P. VII.

Lundæ,
typis Berlingianis.
MDCCCXLIV.

vero, hujusmodi lineas nusquam concurrere posse, nihiloque tamen minus te ab hac nota negativa, quæ negotium facessebat, liberari. — Sed duæ præcipuæ aliæ parallelarum notiones in usum vocatæ sunt, quæ quousque conducant, jam nobis disquirendum est.

D) *Parallelæ et æquidistantes.*

Axioma. *Linea, (si vel curva sit), quæ a recta ubique æque distat, ab hac quantum vis longitudine differre nequit, si iisdem ipsi rectæ normalibus utraque terminatur.* Fig. 10.

Ut si ad rectam AA^{IV} in punctis A, A', A'', A''', A^{IV} normales erigantur æquales $AB = A'B' = A''B'' = A'''B''' = A^{IV}B^{IV}$, linea illi AA^{IV} æquidistans $BB'B''B'''B^{IV}$ (per hæc puncta transiens) eisdemque normalibus extremis AB et $A^{IV}B^{IV}$ terminata ab ipso $AA'A''A'''A^{IV}$ quantumvis lubet differre nequit, ut altera alteram quantitate quacunque superet. — Quam absurdum contrarium sit, facile vides, si distantias minimas reddis, quo (fig. infer.) $AE—ae$ major data quavis, et tamen punctum a ipsi A, et e ipsi E quam proximum. Nempe $Ee = Aa$ (minor data), ideoque capi posset $AE - ae > 2\,Aa$ seu latus $AE > ae + 2 \,.\, Aa = Aa + ae + eE$, quæ tamen (per 1: 20) aperte $> AE$. Neque minus ae ab ipso AE utcunque differre potest, seu $ae—AE$ major data D quacunque fieri potest; facta enim $D = 2\,Aa = Aa + Ee$, foret (ita) $ae - AE > Aa + Ee$, seu $ae > Aa + AE + Ee$, quod quadrare nequit, cum æquidistans ae parum a recta ae (saltem si distantiam Aa minimam feceris) differre nequeat, hæcque recta minima sit earum, quæ a et e conjungunt.

Schol. Quoniam hoc axioma demonstratione munivimus, illud theorema facile diceres. Facile vero concedimus in ultimam hujus partem dubitationem moveri posse. Sic (fig. 10') si lineæ Aa, Cc, Ee deorsum quidem, sed Bb, Dd, Ff sur-

sum sumuntur, facile sane *abcdef* multum excederet *AF*. Tum vero *AB* et *ab* alicubi sese decussarent, ut in puncto quodam medio *m*, quo tamen casu hoc *m* ab *AB æque tantum haud* distaret ac *a* vel *b*. Universim per puncta *a*, *b*, *c*, *d*, *e* lineæ cujuscunque longitudinis duci possunt, quarum tamen omnia puncta a data æque distare nequeunt. Quod ipsum axioma exprimit.

Theorema 1. *Linea, quæ rectæ ubique æque distat, est recta.* F. 10''.

Sumantur enim in recta *AE* partes parvæ æquales $AB = BC = CD = DE$ quotcunque, eique normales erigantur æquales $Aa = Bb = Cc = Dd = Ee$; ducanturque rectæ *ab*, *bc*, *cd*, *de*. Jam primum contendimus, has invicem æquales esse $ab = bc = cd = de$, deindeque et ipsis $AB = BC = CD = DE$ æquales. Ponamus enim figuram *ADda* in *BEeb* transferri atque huic superponi, ut *A* in *B*, *B* in *C*, *C* in *D* et *D* in *E* cadat, ideoque ob angulos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* rectos *Aa* secundum *Bb*, *Bb* secundum *Cc* etc., et *Dd* secundum *Ee* dirigatur, et igitur, cum harum singulæ singulis æquales sint, punctum *a* in *b*, *b* in *c*, *e* in *d* et *d* in *e* cadat; quare necessario est $ab = bc = cd = de$, sicuti primo loco contendimus. Simul vero patet, totam *abcde* æque multiplam ipsius *ab* esse ac *ABCDE* ipsius *AB* est. Deinde nisi $ab = AB$ esset, sit alterutra major Ex. gr. $AB > ab$, et *D* quantitas quædam utcunque data. Quoniam vero $AB - ab$ etiam est data, ejus multiplum $n.(AB - ab)$ seu $n.AB - n.ab$ tale reperire licet, quod *D* superet. (Alm. Proport. l. *D*. 3 et 6. Lund 1832). Jam vero eadem constructione adhibita, sit $AE = n.AB$, eritque simul, ut modo ostendimus, $ae = abcde = n.ab$; quare $AE - ae > D$ seu *AE* hanc *ae* quantitate *D* utcunque magna superaret, quod absurdum (ex. Ax.). Similiter ostenditur, *AB* haud $< ab$ esse, ideoque necessario $AB = ab$. Chordæ igitur curvæ æquidistantis partibus normaliter subjectis rectæ necessario æquales sunt. Jam vero, omnes has chordas in eadem linea recta

sitas esse, ideoque *æquidistantem rectam* esse, contendimus. Ducatur enim *Ba*. Quoniam igitur $Aa = Bb$ fecimus, et $ab = AB$ modo ostendimus, singula latera Trianguli *ABa* singulis ipsius *baB* æqualia sunt, ideoque angulus *Bba* ipsi *A*, quem rectum fecimus, æqualis est. Similiter ducendo *Bc*, ostenditur angulus *Bbc* rectus, ideoque necessario *ab* et *bc* in recta linea sunt sitæ (1: 14), similiterque *bc* et *cd*, *cd* et *de*, etc. Quoties igitur in recta data *AE* puncta æquidistantia *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.. capiuntur, indeque lineæ normales invicem æquales eriguntur, hæ curvam illi æquidistantem in punctis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* etc. secant, quæ in recta linea sita sunt. Sed illa utcunque libeat sumere licet, ideoque omnia hujus puncta in recta eadem erunt sita, cum ita *a*, *b*, *c* etc. quæque æquidistantis fiant puncta, quare linea *abcde*, quæ ipsi *ABCDE* ubique æque distat, nihil nisi recta est linea. *Q. E. D.*

Cor. 1. Recta, eique æquidistans, communibus gaudent normalibus, eisque ubique æqualibus.

Cor. 2. Vice versa igitur huic illa erit æquidistans.

Cor. 3. Si igitur rectæ cujusdam duo puncta æqualibus intervallis eadem directione sumtis a data recta distant, illa huic erit æquidistans, et vice versa.

Schol. His ita feliciter explicatis, cetera duce Tacqueto (Élem. Geom. 1654 p. 32), Wolfio, Thom. Simson (El. of Geom.), Kjellin (Grunderne til Geom.) absolvas. Nempe theoriam parallelarum condere jam planissimum erit, his scil. fundamentis:

1) *Definitione.* Linea, quæ rectæ ubique æque distat, huic *æquidistans* dicitur.

2) *Propositionibus.* a) Linea rectæ æquidistans ipsa recta est.

b) Linea, quæ alicui æquidistans est, vice versa hac sibi æquidistante gaudet, (præc. Cor. 2.), ut lineæ sibi invicem æquidistantes nusquam concurrant, ideoque *parallelæ* sint.

c) æquidistantes communibus ubique gaudent normalibus, interque easdem normales æqualibus partibus. (v. præc. Cor. 1).

d) Quæ eidem æquidistantes sunt, inter se sunt æquidistantes.

e) Per datum punctum unica datæ æquidistans duci potest, (quod mox per se patet, quoniam aperte ipsius distantia puncti est).

f) æquidistantium anguli alterni invicem se æquant. etc. (Eucl. 1: 29, 30).

g) Parallelæ (sensu Eucl.) sunt æquidistantes.

Vel etiam hac: *Sub-æquidistantem* datæ eam dicimus lineam rectam, cujus duo puncta a data versus eandem plagam æque distant. Quæ definitio magis elementaris videtur, cum lineam, ut præcedens, haud introducat, quæ forte curva sit. — Attamen hujusmodi linea ad connormalem facile revocatur. Si nempe fuerit ac recta, cujus puncta a et c ab recta AC æque distant, ut normales $Aa = Cc$ æquales sint, bisecetur AC in B atque erigatur Bb etiam normalis in AC; congruet tetragonum $\overline{aABb}$ cum $\overline{cCBb}$, ideoque angulus abB contiguo cbB æqualis erit, atque igitur rectus; quare ac et AC communi gaudent normali Bb. Sub-æquidistantium igitur theoria connormalium theoriæ conjungi potest *). Fig. 10.

*) Olim Geometriæ D:ni Kjellin operam dantes, sub-æquidistantium theoriam breviter ita expediendam credidimus.

1) *Axiomate.* Si linea finita, eodem latere alterius sita, duo habet puncta inæqualiter ab hac distantia, etiam reliqua, quamdiu lineæ tantum productæ nondum fuerint, ut sese secent, inæqualiter inde distant.

2) Prop. Sub-æquidistantis omnia puncta a conjuncta æque distant. Si enim

Schol. Æquidistantium theoria etiam ex linearum regularium theoria peti potest.

Def. Linea *ABCDE regulariter fracta* l. *regularis* dicitur, si æqualibus ex lineis ($AB = BC = CD = DE$) sub æqualibus angulis ($B = C = D$) componitur. Fig. 11.

Probl. Talem construere.

Constr. 1). Sub angulo quodam B dato vel ad libitum assumto conjungantur lineæ æquales $AB = BC$ (seu in hujus ang. B cruribus abscindantur partes æquales), deinde ad crus BC in C delineetur angulus $BCD = B$, alterumque crus $CD = AB$ faciatur, et s. p. ita tamen, ut semper similes anguli similiter (ex. gr. dextrorsum eunti viam $ABCD$..) describantur. Erit $ABCD$ regularis.

Constr. 2). Sit AOB triangulum æquilaterum ($AO = OB$) quodcunque, cui simile BOC apponatur, huicque tertium COD et s. p. Horum bases regulariter fractam lineam $ABCD$ constituent.

Cor. Quoniam $AO = OB = OC = OD$ etc., circulus centro O per A descriptus etiam per B, C, D etc. transiet; quare linea $ABCD$.. regulariter fracta in circulo quodam aptari potest, ideoque hujus fere in modum centrum quoddam O ambit vel circumit.

Theor. (Fig. 11.) Umbones (C, D, E..) lineæ regularis $ABCDEFG$ primo magis magisque a primo latere AB recedunt, deinde ad hoc accedunt.

---

aliquod punctum aliter ac duo primaria distant, omnia inæqualiter (ex Ax.) distant, nec ideo a primaria æque distant. Q. abs.

3) Linea quæ a recta ubique æque distat, ipsa est recta linea. Per duo enim ipsius puncta ducatur recta linea, cujus ex Prop. præc. omnia puncta ab altera æque distant, ideoque cum punctis æquidistantis coincidunt, quæ ergo recta est. — Cetera fere, ut apud Simson vel Kjellin.

Producamus enim $AB, BC \ldots DE, EF,$ in easque demittamus normales $C\gamma, Dd, .. Fe, Gg$; eruntque ob angulos $B, C, .. E, F$ æquales, horumque contigua latera æqualia, etiam catheti $C\gamma = Dd = Fe = Gg$ (1: 26) æquales.

Sit etiam $D\delta$ in AB atque Cc in $D\delta$ normalis, atque angulus $B (= C)$, tam obtusus, ut $D\delta$ tantum BC productam in d' secet (ut in fig. 11); eritque angulus $BC\gamma$ acutus (ob γ rectum) hujusque contiguus $\gamma Cd'$ obtusus, γCc vero (v. p. 51) non obtusus, quia in quadrilatero γc jam tres anguli recti sunt facti, ideoque ipso $\gamma Cd'$ minor, quare c intra δ et d' cadet, sed Dd extra angulum CDd', cum $Cd'D$ (utut recto c major) obtusus sit. Quæ cum ita sint, erit $Dd' > Dd = C\gamma$, atque $\delta d' > \gamma C$ (quia $\wedge$ obtus. $\gamma Cd' >$ acuto $Cd'\delta$) ideoque tota $D\delta > 2.C\gamma$, seu umbo D multo magis ab AB distat quam C; idemque de sequentibus similiter sitis aliquamdiu valebit. Cum vero ad latus DE in AB perpendiculari (si tale datur) vel fere normale perveneris, umbo E toto (fere) latere DE magis quam D ab AB distabit. Deinde vero, vel, hoc absente, cum linea in AB normalis ab umbone quodam E ducta latus præcedens CD (vel etiam BC) ipsum secuerit, distantia quidem adhuc augebitur, sed minus, quia $Ee < FE$, similiterque $Ff < FG$.

Cor. 1. Similiter si $E\varepsilon, F\varphi$ etc. in AB normales sunt, $E\varepsilon > 3.\gamma C$, $F\varphi > 4.C\gamma$ etc. inveniemus, quandiu in latus normale vel normali proxime accedens proventum haud fuerit; — id, quod tanto tardius fiet, quo obtusior angulus ABC regularis fuerit. Hoc igitur casu umbones ab ipsa AB valde distantes dabuntur.

Cor. 2. Attamen ex constructione antea adhibita patet, maximam distantiam haud superare diametrum circuli circa lineam regularem descripti.

Schol. His positis, etiam (absque ullo axiomate) theorema de æquidistantibus fundamentale demonstrare licet.

Theor. Æquidistans rectæ ipsa recta est linea. (Fig. 10 inf.).